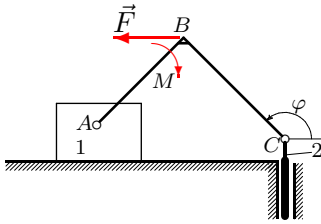


Михайлов Константин, МЭИ, с12-02

Примеры решения механических задач с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода:



1.57. Невесомый изогнутый под прямым углом стержень соединяет груз массой m_1 и поршень массой m_2 , движущийся в вертикальных направляющих. $AB = a$, $BC = b$. Момент M приложен к стержню, горизонтальная сила F — к углу B . За обобщенную координату принять φ .

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Учтём, что: $V_{Cx} = 0$ $V_{Ay} = 0$

Составим граф: $C \xrightarrow[b]{\varphi} B \xrightarrow[a]{\varphi+\pi/2} A$

x : $V_{Ax} = -b\dot{\varphi} \sin(\varphi) - a\dot{\varphi} \cos(\varphi)$

y : $0 = V_{Cy} + b\dot{\varphi} \cos(\varphi) - a\dot{\varphi} \sin(\varphi)$

Следовательно: $V_{Cy} = a\dot{\varphi} \sin(\varphi) - b\dot{\varphi} \cos(\varphi)$

Составим граф: $C \xrightarrow[b]{\varphi} B$

x : $V_{Bx} = -b\dot{\varphi} \sin(\varphi)$

Кинетическая энергия:

$T = m_1/2V_A^2 + m_2/2V_C^2$

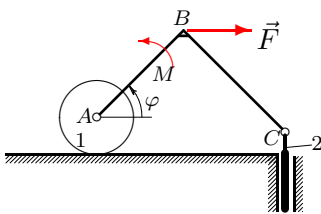
$T = m_1/2(b^2\dot{\varphi}^2 \sin^2(\varphi) + ab\dot{\varphi}^2 \sin(2\varphi) + a^2\dot{\varphi}^2 \cos^2(\varphi)) + m_2/2(a^2\dot{\varphi}^2 \sin^2(\varphi) - ab\dot{\varphi}^2 \sin(2\varphi) + b^2\dot{\varphi}^2 \cos^2(\varphi))$

$T = \dot{\varphi}^2/2(A + B \sin^2(\varphi) + C \sin(2\varphi))$

Обобщенная сила:

$Q = (-M\dot{\varphi} - FV_{Bx} - m_2gV_{Cy})/\dot{\varphi}$

$Q = -M + Fb \sin(\varphi) - m_2ga \sin(\varphi) + m_2gb \cos(\varphi)$



1.58. Невесомый изогнутый под прямым углом стержень соединяет цилиндр массой m_1 и поршень массой m_2 , движущийся в вертикальных направляющих. $AB = a$, $BC = b$. Момент M приложен к стержню, горизонтальная сила F — к углу B . За обобщенную координату принять φ .

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Учтём, что: $V_{Cx} = 0$ $V_{Ay} = 0$

Составим граф: $A \xrightarrow[a]{\varphi} B \xrightarrow[b]{\varphi-\pi/2} C$

$$x: 0 = V_{Ax} - a\dot{\varphi} \sin(\varphi) + b\dot{\varphi} \cos(\varphi)$$

$$y: V_{Cy} = a\dot{\varphi} \cos(\varphi) + b\dot{\varphi} \sin(\varphi)$$

$$\text{Следовательно: } V_{Ax} = a\dot{\varphi} \sin(\varphi) - b\dot{\varphi} \cos(\varphi)$$

Составим граф: $A \xrightarrow[a]{\varphi} B$

$$x: V_{Bx} = V_{Ax} - a\dot{\varphi} \sin(\varphi)$$

$$\text{Следовательно: } V_{Bx} = -b\dot{\varphi} \cos(\varphi)$$

Кинетическая энергия:

$$T = 3m_1/4V_A^2 + m_2/2V_C^2$$

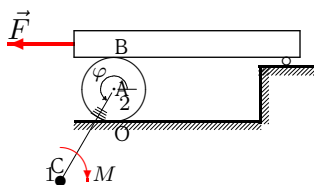
$$T = 3m_1/4(a^2\dot{\varphi}^2 \sin^2(\varphi) - ab\dot{\varphi}^2 \sin(2\varphi) + b^2\dot{\varphi}^2 \cos^2(\varphi)) + m_2/2(a^2\dot{\varphi}^2 \cos^2(\varphi) + a^2\dot{\varphi}^2 \sin(2\varphi) + b^2\dot{\varphi}^2 \sin^2(\varphi))$$

$$T = \dot{\varphi}^2/2(A + B \sin^2(\varphi) + C \sin(2\varphi))$$

Обобщенная сила:

$$Q = (M\dot{\varphi} + FV_{Bx} - m_2gV_{Cy})/\dot{\varphi}$$

$$Q = M - Fb \cos(\varphi) - m_2gb \sin(\varphi) - m_2ga \cos(\varphi)$$



1.59. Стержень длиной L с точкой массой m_1 на конце жестко соединен с диском радиуса R . Масса диска m_2 . На диск положен без проскальзывания горизонтальный брусок, опирающийся одним концом на подшипник. Момент M приложен к стержню. За обобщенную координату принять φ .

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

$$\text{Учтём, что: } V_{Ox} = 0 \quad V_{Oy} = 0$$

Составим граф: $O \xrightarrow[R]{\pi/2} A$

$$x: V_{Ax} = -\dot{\varphi}R$$

Составим граф: $O \xrightarrow[R]{\pi/2} B$

$$x: V_{Bx} = -2\dot{\varphi}R$$

Составим граф: $A \xrightarrow[L]{\varphi} C$

$$x: V_{Cx} = -\dot{\varphi}R - \dot{\varphi}L \sin(\varphi)$$

$$y: V_{Cy} = \dot{\varphi}L \cos(\varphi)$$

Кинетическая энергия:

$$T = 3/4m_2V_{Ax}^2 + 1/2m_1V_C^2$$

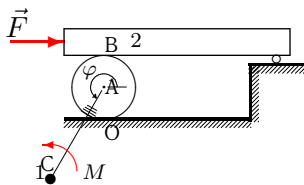
$$T = 3/4 m_2 \dot{\varphi}^2 R^2 + 1/2 m_1 (\dot{\varphi}^2 R^2 + 2\dot{\varphi}^2 RL \sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2 L^2)$$

$$T = A/2 \dot{\varphi}^2 + B/2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-M\dot{\varphi} - FV_{Bx} - m_1 g V_{Cy}) / \dot{\varphi}$$

$$Q = -M + 2FR - m_1 g L \cos(\varphi)$$



1.60. Стержень длиной L с точкой массой m_1 на конце жестко соединен с диском радиуса R . На диск положен без проскальзывания горизонтальный брусок массой m_2 , опирающийся одним концом на подшипник. Момент M приложен к стержню. За обобщенную координату принять φ .

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Учтём, что: $V_{Ox} = 0$ $V_{Oy} = 0$

Составим граф: $O \xrightarrow{\pi/2} A$

x : $V_{Ax} = -\dot{\varphi}R$

Составим граф: $O \xrightarrow{\pi/2} B$

x : $V_{Bx} = -2\dot{\varphi}R$

Составим граф: $A \xrightarrow{\varphi} C$

x : $V_{Cx} = -\dot{\varphi}R - \dot{\varphi}L \sin(\varphi)$

y : $V_{Cy} = \dot{\varphi}L \cos(\varphi)$

Кинетическая энергия:

$$T = 1/2 m_2 V_{Bx}^2 + 1/2 m_1 V_C^2$$

$$T = 2m_2 \dot{\varphi}^2 R^2 + 1/2 m_1 (\dot{\varphi}^2 R^2 + 2\dot{\varphi}^2 RL \sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2 L^2)$$

$$T = A/2 \dot{\varphi}^2 + B/2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)$$

Обобщенная сила:

$$Q = (M\dot{\varphi} + FV_{Bx} - m_1 g V_{Cy}) / \dot{\varphi}$$

$$Q = M - 2FR - m_1 g L \cos(\varphi)$$